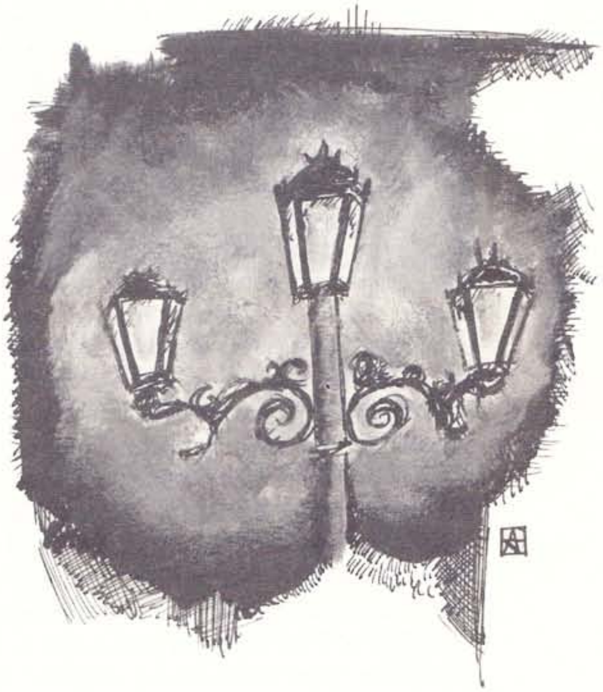
por Francisco Salto Alemany

Supertarea de Littlewood-Ross

Hacer una supertarea es llevar a cabo infinitas acciones en un lapso finito de tiempo. ¿Es posible realizar supertareas? Moverse en un espacio continuo es una supertarea, ya que implica recorrer en un tiempo finito un número infinito de intervalos espaciales finitos (que van rápidamente disminuyendo). La supertarea de Littlewood-Ross es un experimento mental que plantea una interesante paradoja en relación no tanto a la realizabilidad física de supertareas cuanto a su inteligibilidad:



Tenemos una urna lo suficientemente grande como para contener tantas pelotas como números naturales, de manera que cada pelota diferente tiene como índice un único número natural. En el tiempo t=0 (digamos, las 12.00), se meten en la urna las pelotas 1,2 y se saca la pelota 1. En el tiempo t=1/2, se ponen las pelotas 3,4 y se saca la pelota 2. Y así consecutivamente, de modo tal que en cada $t=1-(1/2)^n$ se ponen las pelotas 2n+1, 2n+2 y se quita la pelota n+1. ¿Cuántas pelotas hay en t=1 (a las 12.01)?, ¿cuáles son sus índices?

La paradoja consiste en la existencia de argumentos correctos que avalan respuestas contradictorias a la cuestión planteada. Por una parte, en la urna cada vez hay más pelotas, ya que en cada paso se introducen más pelotas que se quitan. Tendemos así a considerar que en t=1, tras infinitas operaciones, habrá infinitas pelotas en la urna. Por otra parte, al final del proceso en t=1, cualquier pelota metida ha sido sacada, ya que el proceso se ha repetido una cantidad infinita (no enumerable) de veces, de manera que la respuesta sería que en t=1 la urna estará vacía. Con mayor rigor, el argumento es el siguiente. Sea p cualquier pelota. Se introduce en la urna en $t=1-1/2^{[1/2(p-1)]}$ (donde [1/2(p-1)] es la parte entera de fi(p-1)). La pelota p es quitada en el tiempo $t=1-(1/2)^{p-1}$. Puesto que p es una pelota arbitraria, en t=1 la urna está vacía.

Al tratarse de un experimento mental y no físico, no hay un problema especial en tolerar que la acción de introducir dos pelotas y extraer una pelota sean simultáneas. En todo caso, puede si se quiere retrasarse la extracción de cada pelota a un tiempo posterior, por ejemplo: $t=1-(1/2)^n+(1/2)^{n+2}$.

El experimento puede extenderse más allá de t=1. Las pelotas que podían recibir como índice un número natural ya se han agotado, así que bien podemos introducir nuevas pelotas, o asignar a las pelotas que se añadan a partir de t=1 los índices w+1, w+2, ... (donde w es el primer ordinal transfinito). Así, en t=1 se meten w+1, w+2 y se saca w+1. En t=1(1/2) se introducen w+3, w+4 y se saca w+2, y así sucesivamente. Volviendo la vista a t=1, ¿contenía w_0 pelotas?

LECTURAS

- ALLIS Y KOETSIER, *On some paradoxes of the infinite*, BJPS 42, 1991, pp. 187-194.
- ALLIS Y KOETSIER, *On some paradoxes of the infinite II*, BJPS 46, 1995, pp. 235-247.
- HOLGATE, *Mathematical Notes on Ross paradox*, BJPS 45, 1994, pp. 302-304.